Guía Examen Extraordinario

Pensamiento Matemático III **SEM. AGO. 24 – ENE 2025**

NOMBRE: ____ NO. DE CONTROL: ________________

GRUPO: _____________________________ CARRERA: ______________________________________

Operaciones con funciones

Las **operaciones con funciones** son operaciones matemáticas que se realizan sobre las funciones ya definidas. Al aprender estas operaciones, es esencial entender cómo combinar funciones de manera coherente y cómo se afectan mutuamente. Las operaciones comunes con funciones incluyen:

- **Suma de funciones**
- **Resta de funciones**
- **Multiplicación de funciones**
- **División de funciones**
- **Composición de funciones**

1. Suma de funciones

La **suma de funciones** consiste en sumar dos funciones $f(x)$, $g(x)$. La operación se realiza punto por punto.

- **Fórmula**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$, entonces:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + (2x+1) = x^2 + 2x + 1$$

2. Resta de funciones

La **resta de funciones** consiste en restar una función $g(x)$ de una función $f(x)$.

- **Fórmula**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x + 2$, entonces:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+3x) - (x+2) = x^2 + 3x - x - 2 = x^2 + 2x - 2$$

3. Multiplicación de funciones

La **multiplicación de funciones** consiste en multiplicar dos funciones $f(x)$, $g(x)$

- **Fórmula**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$, entonces:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

4. División de funciones

La **división de funciones** implica dividir una función $f(x)$ por otra función $g(x)$, siempre que $g(x) \neq 0$.

- **Fórmula**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2 + 1$(x), $g(x) = x - 1$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{x}^2 + 1}{\mathrm{x} - 1}, g \neq 1$$

Nota: Es importante asegurarse de que el denominador $g(x)$ no sea igual a cero, ya que no se puede dividir entre cero.

5. Composición de funciones

La **composición de funciones** implica aplicar una función a los resultados de otra función. Si tienes dos funciones $f(x)$, $g(x)$, la composición de f, g se denota como $f \circ g$.

- **Fórmula**: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 1$, entonces:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x+1) = (3x+1)^2 = (3x+1)(3x+1) = 9x^2 + 3x + 3x + 1$$
$$= 9x^2 + 6x + 1$$

Nota: El orden de la composición es importante. En $f \circ g$, primero se aplica $g(x)$ luego $f(x)$ al resultado de $g(x)$.

6. Ejercicios prácticos

1. Si $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x^2 + 4$, encuentra:
   - $(f + g)(x)$
   - $(f - g)(x)$
   - $(f \cdot g)(x)$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
   - $(f \circ g)(x)$

Límites

1. ¿Qué es un límite?

Un **límite** es el valor al que se aproxima una función $f(x)$ cuando x se acerca a un número a. Matemáticamente, se define como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto significa que cuando x se acerca a a, los valores de $f(x)$ se acercan al número L.

2. Técnicas básicas para evaluar límites

Existen varias maneras de evaluar límites. Las técnicas más comunes son:

2.1 Evaluación directa

Cuando la función es continua en el punto al que x se acerca, se puede simplemente sustituir $x = a$ en la función. Es el caso más sencillo.

- **Ejemplo**:

  Para evaluar $\lim_{x \to 2}(3x + 4)$, simplemente sustituimos $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$$

2.2 Sustitución directa fallida: Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Si al evaluar el límite directamente, obtenemos una **forma indeterminada** como $\frac{0}{0}$, debemos usar otras técnicas, ya que la evaluación directa no proporciona un valor claro.

3. Límites de la forma $\frac{0}{0}$

Cuando al evaluar un límite obtenemos la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, significa que tanto el numerador como el denominador tienden a cero, y necesitamos realizar una simplificación para poder calcular el límite.

3.1 Factorización (para límites de la forma $\frac{0}{0}$)

La **factorización** es uno de los métodos más comunes para resolver límites de la forma $\frac{0}{0}$. En muchos casos, al factorizar el numerador o el denominador (o ambos), podemos cancelar términos y simplificar la expresión.

- **Ejemplo 1 (factorización por el método de diferencia de cuadrados):**

  Evaluar $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$.

  Primero, intentamos la evaluación directa:

  $$\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

  Como tenemos una forma indeterminada, factorizamos el numerador:

  $$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

  Entonces, la expresión se convierte en:

  $$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

  Cancelamos el factor $(x-1)$ (siempre y cuando $x\neq$ y obtenemos:

  $$\lim_{x\to 1} x+1=1+1=2$$

- **Ejemplo 2 (Factorización por una constante)**
  Consideremos el siguiente límite:
  $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3x-12}{x-4}\right)$$
  Paso 1: Evaluación directa
  Intentamos sustituir $x = 4$ directamente:
  $$\frac{3(4)-12}{4-4} = \frac{12-12}{0} = \frac{0}{0}$$
  Esto da como resultado una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo cual nos indica que debemos factorizar la expresión en el numerador.
  Paso 2: Factorización por constante
  El numerador tiene un factor común. Extraemos 3 del numerador:
  $$3x + 12 = 3(x-4)$$
  Por lo tanto, el límite se convierte en:
  $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3(x-4)}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4} 3 = 3$$
- **Ejemplo 3 (Factorización de la forma $(x+a)(x-b)$)**
  Consideremos el siguiente límite:
  $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right)$$
  Paso 1: Evaluación directa
  Primero, intentamos evaluar el límite sustituyendo $x = 1$ directamente en la expresión:
  $$\frac{1^2-3(1)+2}{1-1} = 1 - 3 + \frac{1-3+2}{0} = \frac{0}{0}$$
  Obtenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo que indica que necesitamos factorizar el numerador para poder simplificar la expresión.
  Paso 2: Factorización del numerador
  Ahora, vamos a factorizar el trinomio $x^2 - 3x + 2$. Buscamos dos números que multiplicados den $+2$ (el término constante) y sumados den -3 (el coeficiente de x).

  Los dos números que cumplen estas condiciones son -1 y -2. Por lo tanto, podemos factorizar el trinomio de la siguiente forma:

  $$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Paso 3: Sustitución en la expresión original

Sustituimos la factorización en el límite original:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\right)$$

Paso 4: Cancelación de factores

Ahora podemos cancelar el factor $(x-1)$ en el numerador y el denominador (recordando que no podemos dividir por cero, así que $x \neq 1$:

$$\lim_{x \to 1}(x-2) = 1-2 = 1$$

4. Ejercicios Prácticos

- $\lim_{x \to 3}(3x^2 - 2x + 1)$

- $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$

- $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x-2}{4x-8}\right)$

- $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\right)$

Derivación

1. Concepto de Derivada

La **derivada** de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ mide la tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x en ese punto. Es el límite de la razón de cambio promedio a medida que x se aproxima a a. Matemáticamente, se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ en el punto x.

2. Reglas Básicas de Derivación

2.1 Derivada de una constante

Si $f(x) = c$, donde $c$cc es una constante, entonces:

$$f'(x) = 0$$

Ejemplo:

$$\mathrm{f}(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$$

2.2 Derivada de x

Si $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = 1$$

Ejemplo:

$$\mathrm{f}(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$$

2.3 Derivada de una potencia de x

Si $f(x) = x^n$, donde n es cualquier número real, entonces:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

2.4 Derivada de una constante multiplicada por una función

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante, entonces:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

3. Reglas de Derivación Avanzadas

3.1 Regla de la suma y resta

Si $f(x) = g(x) \pm h(x)$, entonces:

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 2x + 3$$

3.2 Regla del Producto

Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 \cdot (x^2 + 3x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot (x^2 + 3x) + x^2 \cdot (2x + 3)$$

3.3 Regla del Cociente

Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $h(x) \neq 0$, entonces:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left(h\,(x)\right)^2}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

4. Derivadas de Funciones Compuestas (Regla de la Cadena)

La **regla de la cadena** se utiliza cuando tenemos una función dentro de otra. Si $f(x) = g(h(x))$, entonces:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = (3x^2 + 2x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(3x^2 + 2x)^2(6x + 2) = (18x + 6)(3x^2 + 2x)^2$$

5. Ejercicios prácticos

a) $f(x) = 9\pi$

b) $f(x) = \sqrt{8}x$

c) $f(x) = x^{100}$

d) $f(x) = 30x^{10}$

e) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$

f) $f(x) = e^{8x}$

g) $f(x) = (4x^3 + 5x^2)(6x - 7)$

h) $f(x) = \frac{6x-5}{4x+3}$

Puntos Críticos y Análisis de Máximos y Mínimos

1. ¿Qué es un punto crítico?

Un **punto crítico** de una función $f(x)$ es cualquier punto $x = c$ en el dominio de la función donde:

- La derivada de la función $f'(x)$ se anula, es decir, $f'(c) = 0$, o
- La derivada no existe en ese punto.

Los puntos críticos son importantes porque pueden ser **máximos** o **mínimos**, y son esenciales para encontrar los valores extremos de una función.

2. Cómo encontrar los puntos críticos

Paso 1: Encuentra la derivada de la función $f'(x)$

Para encontrar los puntos críticos, primero necesitas encontrar la derivada de la función. Esto te permitirá identificar los puntos donde la pendiente de la tangente a la curva es cero o indefinida.

Paso 2: Resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ o busca puntos donde $f'(x)$ no existe

Una vez que tienes la derivada de la función, resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ para encontrar los valores de x donde la derivada se anula. Además, busca puntos donde la derivada no exista (como en los puntos donde la función tiene discontinuidades o picos).

Ejemplo:
Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Para encontrar los puntos críticos:

1. Encuentra la derivada:
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
2. Resuelve $f'(x) = 0$
$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$$
3. Los puntos críticos son $x = 0$, $x = 2$.

3. Decidir si es un máximo o un mínimo

3.1 Prueba de la segunda derivada:

Una vez que encuentres los puntos críticos, el siguiente paso es determinar si esos puntos corresponden a un **máximo** local, un **mínimo** local

Para hacer esto, utilizamos la **segunda derivada**.

Paso 1: Calcula la segunda derivada $f''(x)$

La segunda derivada nos indica cómo está cambiando la pendiente de la función. Para decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo, evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

Paso 2: Realiza la prueba de la segunda derivada

- Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un **máximo local** en a.
- Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un **mínimo local** en a.
- Si $f''(a) = 0$, la prueba no es concluyente.

Ejemplo:

Considerando la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, donde los puntos críticos fueron $x = 0$ y $x = 2$:

1. Primero, encontramos la segunda derivada:
$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$$
2. Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:
   - En $x = 0$: $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$. Como $f''(0) < 0$, hay un **máximo local** en $x = 0$.
   - En $x = 2$: $f''(2) = 6(2) - 6 = 6$. Como $f''(2) > 0$, hay un **mínimo local** en $x = 2$.

3.2 Prueba de la primera derivada (si la segunda derivada no es concluyente)

Si la segunda derivada es cero en un punto crítico, la prueba de la primera derivada puede ser útil.

Paso 1: Calcula la derivada de la función $f'(x)$

Paso 2: Evalúa el signo de $f'(x)$ en los intervalos alrededor del punto crítico:

- Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(+)$ a $(-)$, se trata de un **máximo local**.
- Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(-)$ a $(+)$, se trata de un **mínimo local**.
- Si $f'(a)$ no cambia, la prueba no es concluyente

Ejemplo:

Considerando la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, donde los puntos críticos fueron $x = 0$ y $x = 2$:

1. Primero, encontramos la segunda derivada:
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
2. evaluamos en valores cercanos a cada punto crítico
   - Para x=0: $f'(-0.1) = 3(-0.1)^2 - 6(-0.1) = 0.63$, $f'(0.1) = 3(0.1)^2 - 6(0.1) = -0.57$. Como cambia de $(+)$ a $(-)$, hay un **máximo local** en $x = 0$.
   - Para x=2: $f'(1.9) = 3(1.9)^2 - 6(1.9) = -0.57$, $f'(2.1) = 3(2.1)^2 - 6(2.1) = 0.63$. Como cambia de $(-)$ a $(+)$, hay un **mínimo local** en $x = 2$.

4. Ejercicios prácticos

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

Teoría

- Notación de Newton: Si x= $x(t)$ la primera derivada es $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.
- Notación de Leibniz: Si $y = f(x)$ la primera derivada es $y' = f'(x)$.
- Definición de Función: Es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto E.
- Recta tangente: Es una recta que toca a la curva en un solo punto llamado punto de tangencia.
- Pendiente: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Definición de derivada: $\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$
- Criterio de la primera derivada: Si $f'(a) = 0$ y entonces
  - Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(+)$ a $(-)$, se trata de un máximo.
  - Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(-)$a $(+)$, se trata de un mínimo.
  - Si $f'(a)$ no cambia, la prueba no es concluyente.

- Criterio de la segunda derivada: Si $f'(a) = 0$ y entonces
  - Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(+)$ a $(-)$, se trata de un máximo.
  - Si en valores cercanos anteriores y posteriores a $f'(a)$ cambia de $(-)$a $(+)$, se trata de un mínimo.
  - Si $f'(a)$ no cambia, la prueba no es concluyente.